15/12/15

Έστω $v_1 \ldots v_\mu$ βάση του δ.χ. επί του V επί του σώματος F.

ΕΡΩΤΗΜΑ 1: Υποθέτουμε $W=\langle v_1 \ldots v_s \rangle$ υπόχωρος του V (όπου $v_1 \ldots v_s \in V$)

Βρείτε μία βάση και τη διάσταση του W (Απάντηση: Το είδαμε)

ΕΡΩΤΗΜΑ 2: Υποθέτουμε $W=\langle v_1 \ldots v_s \rangle$ και $U=\langle u_1 \ldots u_p \rangle$ δύο υπόχωροι του V

α) Βρείτε μία βάση και τη διάσταση του $W+U$

β) Βρείτε μία βάση και τη διάσταση του $U \cap W$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

α) Έχουμε $W+U$ είναι το σύνολο των γραμμικών συνδυασμών $W+U=\langle v_1 \ldots v_s, u_1 \ldots u_p \rangle$ (από τους ορισμούς)

Στη συνέχεια εφαρμόζουμε τον αλγόριθμο για την ερώτηση 1, για το σύνολο γεννητόρων $v_1 \ldots v_s, u_1 \ldots u_p$ του $W+U$ και βρίσκουμε βάση του $W+U$. Τότε $\dim_F(W+U)$ = ο αριθμός στοιχείων της βάσης.

β) Από θεωρία $\dim U \cap W = \dim U + \dim W - \dim(U+W)$

Επομένως ο υπολογισμός της διάστασης του $U \cap W$ ανάγεται στον υπολογισμό των διαστάσεων των $W, U, W+U$ (που ξέρουμε να το κάνουμε)

Για εύρεση βάσης του $U \cap W$ θα πούμε αργότερα...

ΕΡΩΤΗΜΑ 3: Έστω $v_1, \ldots v_s \in V$. Με χρήση της βάσης $e_1 \ldots e_\mu$ του V αποφανθείτε:

α) Αν τα $v_1 \ldots v_s$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα ή όχι

β) Αν τα $v_1 \ldots v_s$ παράγουν το V δηλ. $V=\langle v_1 \ldots v_s \rangle$ ή όχι

γ) Αν τα $v_1 \ldots v_s$ είναι βάση του V ή όχι

Λύση

Αφού $e_1 \dots e_\mu$ βάση του V, για $i=1,2\dots s$ υπάρχουν μοναδικά $a_{ij} \in F$ ώστε

$$v_i = \sum_{j=1}^{\mu} a_{ij} e_j$$

Θέτουμε $A=[a_{ij}] \in F^{s\times\mu}$ τότε:

i) $v_1 \dots v_s$ γραμμικά ανεξάρτητα $\Leftrightarrow$ βαθμίδα$(A)=s$

ii) $v_1 \dots v_s$ παράγουν το $V \Leftrightarrow$ βαθμίδα$(A)=\mu$

iii) $v_1 \dots v_s$ βάση του $V \Leftrightarrow (s=\mu$ και βαθμίδα$(A)=s)$
$\Leftrightarrow (s=\mu)$ και $(\det A \neq 0)$

Παράδειγμα

Έστω $V=\mathbb{R}^{2\times 2}$ και $v_1=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$, $v_2=\begin{bmatrix}0&1\\3&8\end{bmatrix}$,
$v_3=\begin{bmatrix}0&0\\4&5\end{bmatrix}$, $v_4=\begin{bmatrix}0&0\\0&32\end{bmatrix}$

Δείξτε ότι v_1, v_2, v_3, v_4 βάση του V.

Λύση:

Θεωρούμε τη βάση $e_1=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$ $e_2=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}$, $e_3=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}$, $e_4=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$. Εκφράζουμε, για $i=1\dots4$ το v_i συναρτήσει της βάσης. Παίρνουμε:

$v_1=1e_1+0e_2+0e_3+0e_4$,

$v_2=0e_1+1e_2+3e_3+8e_4$

$v_3=0e_1+0e_2+4e_3+5e_4$

$v_4=0e_1+0e_2+0e_3+32e_4$

Άρα $A=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&3&8\\0&0&4&5\\0&0&0&32\end{bmatrix}$

Αφού A είναι τριγωνικός $\det A=$ γινόμενο διαγωνίων στοιχείων $=1\cdot1\cdot4\cdot32\neq0$ Άρα $v_1 \dots v_4$ βάση του V

ΕΡΩΤΗΜΑ 4.α) Έστω $v_1 \ldots v_s \in V$ γραμμ. ανεξάρτητα. Επεκτείνετε τα $v_1 \ldots v_s$ σε βάση του V (με χρήση της δοθείσας βάσης $e_1 \ldots e_\mu$ του V)

ΟΡΟΛΟΓΙΑ: Έστω V δ.χ./F και $w_1, \ldots w_s \in V$. Θέτουμε $W = \langle w_1 \ldots w_s \rangle$.

Λέμε W η γραμμική θήκη των $w_1 \ldots w_s$

W ο υπόχωρος που παράγεται από τα $w_1 \ldots w_s$

Τα $w_1 \ldots w_s$ σύνολο γεννητόρων του W

Τα $w_1 \ldots w_s$ παράγουν το W.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ/ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ Για το ερώτημα 4

ΒΗΜΑ 1ο: Αφού $e_1 \ldots e_\mu$ βάση του V και $v_1 \ldots v_s$ γραμμ. ανεξάρτητα από τη θεωρία $s \leq \mu$

Αν $s = \mu$ από τη θεωρία $v_1 \ldots v_s$ βάση του V και τελειώσαμε. Υποθέτουμε στα επόμενα $s < \mu$.

ΒΗΜΑ 2ο: Αφού $e_1 \ldots e_\mu$ βάση του V, υπάρχουν για $i = 1 \ldots s$ μοναδικά $a_{ij} \in F$ ώστε $v_i = \sum_{j=1}^{\mu} a_{ij} e_j$. Θέτουμε $A = [a_{ij}] \in F^{s \times \mu}$

ΒΗΜΑ 3ο: Υπολογίζουμε (π.χ. με χρήση απαλοιφής Gauss) κλιμακωτό πίνακα $C \in F^{s \times \mu}$ γραμμοϊσοδύναμο του A. Τότε υπάρχουν ακριβώς $\mu - s$ στήλες του C, έστω στήλες $j_1, j_2, \ldots j_{\mu-s}$ με την ιδιότητα καμία γραμμή του C να μην έχει αρχική μονάδα σε αυτή την στήλη.

(Παράδειγμα: Αν $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ποιες στήλες του C έχουν αυτήν την ιδιότητα;

Απάντηση: 1,3,5)

Τότε $v_1, \ldots v_s, e_{j_1}, e_{j_2}, e_{j_{\mu-s}}$ βάση του V

Δηλαδή στο παράδειγμα για το C προσθέτουμε e_1, e_3, e_5.

Παράδειγμα: Έστω $v_1=(1,0,0)$, $v_2=(1,0,8)\in\mathbb{R}^3$.

α) Δείξτε ότι v_1,v_2 γραμμ. ανεξάρτητα

β) Επεκτείνεται τα v_1,v_2 σε βάση του $\mathbb{R}^3$

Λύση

Θέτουμε $e_1=(1,0,0)$, $e_2=(0,1,0)$, $e_3=(0,0,1)$ την κανονική βάση του $\mathbb{R}^3$.

Έχουμε $v_1=1e_1+0e_2+0e_3$

$v_2=1e_2+0e_2+8e_3$

Θέτουμε $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&0&8\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{2\times3}$

$$A\xrightarrow{r_2\to r_2-r_1}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&8\end{bmatrix}\xrightarrow{r_2\to\frac{1}{8}r_2}C=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

Άρα βαθμίδα$(A)=2=$ αριθμός ~~βαθμίδα~~ γραμμών του A

έπεται v_1,v_2 γραμμ. ανεξ.

Ποιες είναι οι στήλες του C για τις οποίες δεν υπάρχει αρχική μονάδα σε κάποια γραμμή του C;

Απάντηση:

Μόνο μία, η δεύτερη. Άρα από τον αλγόριθμο το $v_1, v_2, e_2=(0,1,0)$ είναι βάση του $\mathbb{R}^3$ που επεκτείνει το γραμμικώς ανεξάρτητο σύνολο v_1,v_2

ΕΡΩΤΗΜΑ 5: Έστω $w_1, w_2 \dots w_s$ και $W = \langle w_1 \dots w_s \rangle$
Βρείτε ευθύ συμπλήρωμα του W στο V. Δηλαδή βρείτε έναν υπόχωρο U του V ώστε $V = W \oplus U$
Λύση
ΒΗΜΑ 1ο: Χρησιμοποιώντας τα προηγούμενα, βρίσκουμε βάση $v_1 \dots v_p$ του W (άρα $\dim W = p$)

ΒΗΜΑ 2ο: Αν $p = \mu \Rightarrow W = U$. Θέτουμε $U = \{0\}$ και τελειώσαμε.
Υποθέτουμε $p < \mu$. Χρησιμοποιώντας τα προηγούμενα επεκτείνουμε το γραμ. ανεξάρτητο υποσύνολο $v_1, \dots v_p$ του V σε βάση $v_1 \dots v_p, z_1 \dots z_{\mu-p}$.
Θέτουμε $U = \langle z_1 \dots z_{\mu-p} \rangle$. Τότε ισχύει:
α) $z_1 \dots z_{\mu-p}$ βάση του U
b) Το U είναι ένα ευθύ συμπλήρωμα του W

Σημείωση: Τα $z_1 \dots z_{\mu-p}$ είναι τα $e_{j_1}, e_{j_2}, \dots e_{j_{\mu-p}}$ του προηγούμενου αλγορίθμου.

Συνοψίζοντας: Έστω V δ.χ/F και $e_1 \dots e_\mu$ βάση του V. Με χρήση της βάσης $e_1 \dots e_\mu$ έχουμε δώσει αποτελεσματικές μεθόδους (δηλ. αλγορίθμους) για τα ακόλουθα ερωτήματα.
A) Έστω $W = \langle w_1 \dots w_s \rangle$ υπόχωρος. Βρείτε βάση του W και ευθύ συμπλήρωμα του W στο V
β) Έστω $w_1 \dots w_s \in V$. Βρείτε
i) αν τα $w_1 \dots w_s$ είναι γραμ. ανεξάρτητα ή όχι
ii) αν $V = \langle w_1 \dots w_s \rangle$
iii) αν $w_1 \dots w_s$ βάση του V
c) Έστω $W = \langle w_1, \dots w_s \rangle$, $U = \langle u_1 \dots u_e \rangle$

i) Βρείτε βάση (και διάσταση) του $W+U$
ii) Βρείτε την διάσταση $W \cap U$
D) Έστω $v_1, \ldots v_s \in V$ γραμμ. ανεξ. Επεκτείνετε το $v_1 \ldots v_s$ σε βάση του V.

Φροντιστηριακές ασκήσεις #5

Άσκηση 1
Έστω $e_1=(1,0,0)$, $e_2=(0,1,0)$, $e_3=(0,0,1)$ η κανονική βάση του $\mathbb{R}^3$. Έχουμε:
$x=\alpha^2 \cdot e_1+0 \cdot e_2+1 \cdot e_3$
$y=0 \cdot e_1+\alpha \cdot e_2+2 \cdot e_3$
$z=1 \cdot e_1+0 \cdot e_2+1 e_3$

Θέτουμε
$$A=\begin{bmatrix} \alpha^2 & 0 & 1 \\ 0 & \alpha & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

Από τη θεωρία x,y,z βάση του $\mathbb{R}^3$ αν και μόνο αν βαθμίδα$(A)=3$ αν και μόνο $\det A \neq 0_{\mathbb{R}}$
Έχουμε $\det A = \alpha^2 \cdot \det \begin{bmatrix} \alpha & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - 0 \cdot \det \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + 1 \det \begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
$=\alpha^3-\alpha=\alpha(\alpha^2-1)=\alpha(\alpha-1)(\alpha+1)$
ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ: x,y,z βάση του $\mathbb{R}^3$ αν και μόνο αν $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0,1,-1\}$

Ασκηση 2

Θα δ.ο. V υπόχωρος του $\mathbb{R}^{3\times 3}$

α) Εχουμε $O_{\mathbb{R}^{3\times3}} = \mathbb{O}_{3\times3} \in V$ γιατί ο $\mathbb{O}_{3\times3}$ είναι διαγώνιος

b) Εστω $A, B \in V$ δηλαδή A, B διαγώνιοι. Εχουμε δει ότι $A+B$ διαγώνιος.

c) Εστω $\lambda \in \mathbb{R}$ και $A \in V$, δηλαδή A διαγώνιος. Φανερά $\lambda A \in V$ γιατί λA διαγώνιος

Από τα α, b, c V υπόχωρος του $\mathbb{R}^{3\times3}$

Εχουμε $V = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \,\middle|\, \alpha, b, c \in \mathbb{R} \right\}$

Εχουμε (1) $\begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Θέτουμε $e_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $e_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $e_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

ΙΣΧΥΡΙΣΜΟΣ: e_1, e_2, e_3 βάση του V

Απόδειξη

Θα δείξουμε 1. $V = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle$

2. e_1, e_2, e_3 γραμμ. ανεξάρτητα

Πράγματι η (1) μας λέει ότι $V = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle$

Εστω $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ με $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 = O_{\mathbb{R}^{3\times3}} = \mathbb{O}_{3\times3}$

Ισοδύναμα $\lambda_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbb{O}_{3\times3}$

Ισοδύναμα $\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Ισοδύναμα $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 < 0_{\mathbb{R}}$

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ: Τα e_1, e_2, e_3 γραμμ. ανεξ. και επίσης παράγουν το V άρα τα e_1, e_2, e_3 βάση του V.